Chapitre n° 9: Primitives et équations différentielles

Terminale, 2021-2022

1 Primitive d'une fonction continue

1.1 Définition d'une équation différentielle

Définition 1 (Équation différentielle)

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction ; elle se présente sous la forme d'**une relation entre cette fonction inconnue et ses dérivées successives**.
C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle.

Exemple 1. ① Trouver toutes les fonctions f telles que pour tous $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$, c'est résoudre une équation fonctionnelle (qui n'est pas une équation différentielle)

② Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$, on a $f'(x) - 2f''(x) = 3 + 5x + f^2(x)$, c'est résoudre une équation différentielle sur I.
On note cette équation $y' - 2y'' = 3 + 5x + y^2$.

③ **Une** solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x$ est $y =$
En général, une équation différentielle admet une infinité de solutions.
Par exemple, une autre solution de l'équation différentielle est

1.2 Équation différentielle du type $y' = f$

Définition 2 (Équation différentielle $y' = f$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x dans I, on a $g'(x) = f(x)$.

Méthode 1. Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Prouver que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$

1.3 Primitive d'une fonction

Définition 3 (Primitive)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque 1. Dans ces conditions, on a équivalence entre « F a pour dérivée f sur I » et « f a pour primitive F sur I »

Exemple 2. Soit les fonctions $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{2} \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = f(x)$

1.4 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	F primitive de f sur	Condition
a	$ax+b$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0;+\infty[$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ et $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ si $n<0$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$	
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$	
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$	

1.5 Linéarité des primitives

Propriété 4 (Linéarité)

Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur l'intervalle I, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

Preuve. En conséquence de la linéarité des dérivées : $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$.

Exemple 3. Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2e^x \end{array}$.

1.6 Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive de f	sur tout intervalle I	vérifiant
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	$x \in I$	$u>0$ sur I et dérivable sur I
$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b)+c$	$ax+b \in I$	u dérivable sur I
$u'e^u$	e^u+c	$x \in I$	u dérivable sur I
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$x \in I$	u dérivable (et non nulle si $n<0$) sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$x \in I$	$u>0$ sur I et dérivable sur I

Exemple 4. Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle I :

① $f(x) = x^3 - 2x$ et $I = \mathbb{R}$

② $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$

③ $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)$ et $I = \mathbb{R}$

④ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $I = \mathbb{R}$

⑤ $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ et $I = \mathbb{R}$

1.7 Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété 5

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle

Preuve. voir chapitre « Calcul intégral »

Propriété 6

Si f admet F comme primitive sur l'intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G de la forme $G : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.

Preuve. Soit G une primitive de f sur I. La fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ est dérivable et pour $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Donc H est une constante réelle c : $G(x) - F(x) = c$. D'où $G(x) = F(x) + c$.

Réciproquement, si $c \in \mathbb{R}$ la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ a pour dérivée $G'(x) = F'(x) = f(x)$ sur I, donc est une primitive de f.

Propriété 7

Soit f admettant F comme primitive sur l'intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve. Les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + k$.
Donc $G(x_0) = F(x_0) + k = y_0$ si et seulement si $k = y_0 - F(x_0)$.
Donc f a pour unique primitive satisfaisant $G(x_0) = y_0$ la fonction définie par $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

Exemple 5. Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + x^2$ ....
Toute primitive de $x^{-2} + x^2$ est de la forme $F(x) = ax^{-1} + bx^3 + c$
Dans ce cas, $f(x) = -ax^{-2} + 3bx^2$ donc $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 + c$

Exemple 6. Donner la primitive de $f : x \mapsto e^{-x}$ qui s'annule en $x = 2$ ....
Toute primitive de f est de la forme $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + c$
$F(2) = 0 \iff c - \mathrm{e}^{-2} = 0 \iff c = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ donc $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-x}$

2 Équations différentielles

2.1 Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété 8

Soit a un réel. Soit l'équation différentielle : $$y' = ay \qquad (E)$$

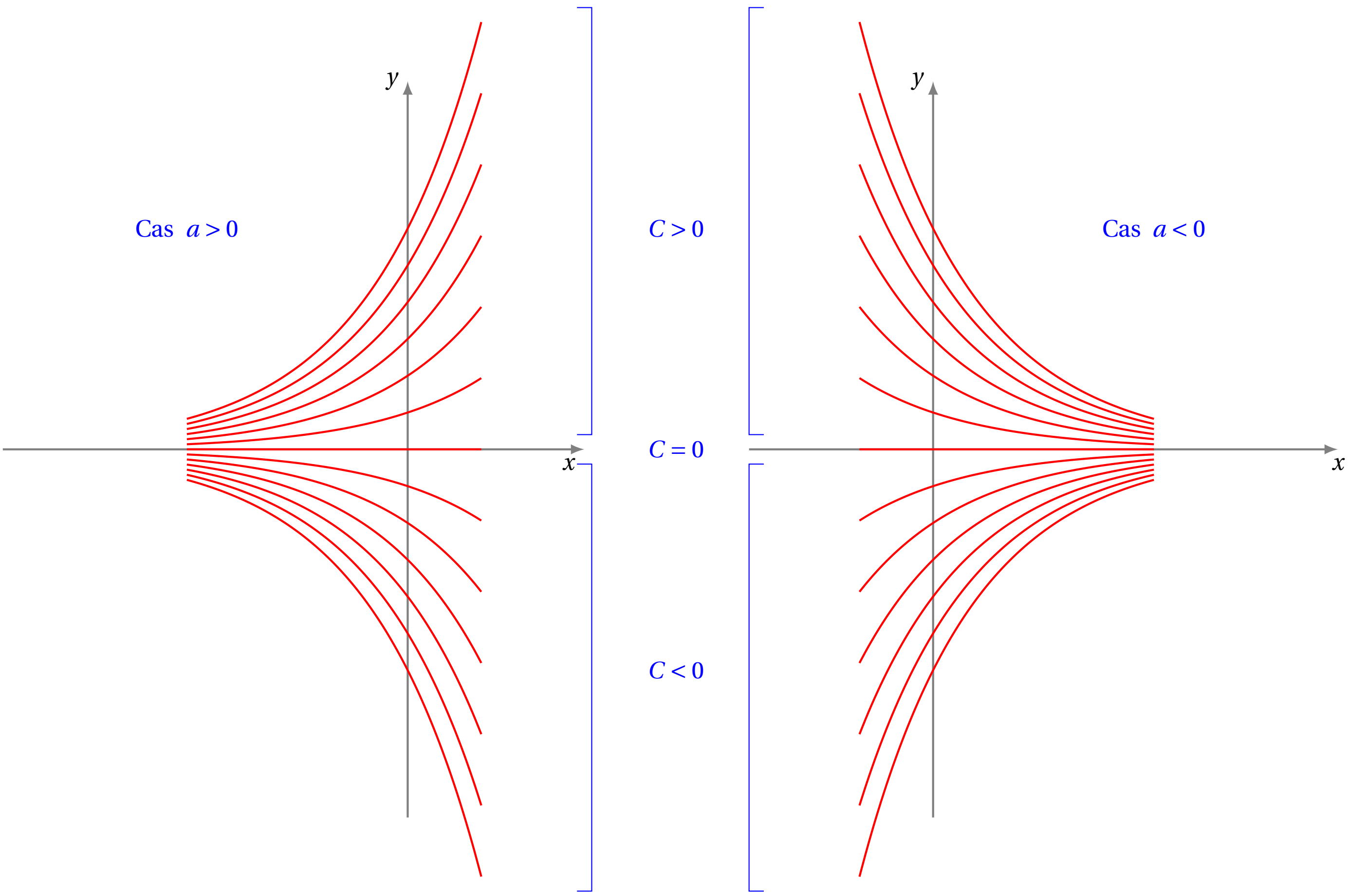
Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions f définies par :

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque

Exemple 7. $3y' - 5y = 0 \iff y' = \frac{5}{3}y$.
Les solutions sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{\frac{5}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

Preuve. ⋆ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$
f est donc une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

⋆ Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) =$
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) =$. La fonction g est donc égale à
Et donc $f(x) =$



Exemple 8. On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$

① Déterminer l'ensemble des solutions

② Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$

2.2 Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété 9

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$, appelée **solution particulière constante.**

Preuve. Posant $g(x) = -\frac{b}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) =$
Donc $ag(x) + b =$
g est donc bien **une** solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 10 (admise)

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto u(x) + v(x)$,
où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ax + b$,
et v est une solution de l'équation $y' = ay$

Corollaire 11. Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Exemple 9. On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$

① Déterminer l'ensemble des solutions

② Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$

2.3 Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété 12 (admise)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto u(x) + v(x)$,
où u est une solution particulière de l'équation $y' = ax + f$,
et v est une solution de l'équation $y' = ay$.

Exemple 10. On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$

① Déterminer un trinôme solution particulière.

② Résoudre l'équation différentielle.